

Model Volatilitas ARCH(1) dengan *Returns Error* Berdistribusi *non-central Student-t* Studi Kasus: Kurs Beli JPY dan EUR terhadap IDR

Elisabeth D. Saputri¹, Didit B. Nugroho², dan Adi Setiawan³.

Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Kristen Satya Wacana
Jalan Diponegoro 52–60 Salatiga 50711, Jawa Tengah, Indonesia.
e-mail: 662012002@student.uksw.edu

Abstrak—Studi ini mengaplikasikan model volatilitas *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (ARCH) lag 1 untuk *returns* kurs beli *Japanese Yen* (JPY) dan *Euro* (EUR) terhadap *Indonesian Rupiah* (IDR) dari Januari 2009 sampai Desember 2014. Distribusi *non-central Student-t* (NCT) dipilih untuk mengakomodasi *flexible skewness* dan *heavy-tailedness* pada *returns error*. Algoritma *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) yang efisien dikonstruksi untuk memperbarui nilai-nilai parameter dalam model yang tidak bisa dibangkitkan secara langsung dari distribusi *posterior*. Berdasarkan 95% interval *highest posterior density* (HPD), hasil menunjukkan penolakan terhadap distribusi NCT untuk semua data yang diamati. Meskipun begitu, *Bayes factor* mengindikasikan bukti sangat kuat dalam mendukung penggunaan distribusi NCT daripada distribusi normal dan *Student-t*.

Kata Kunci : kurs beli, MCMC, model ARCH, non-central Student-t, volatilitas returns

I. PENDAHULUAN

Engle memperkenalkan istilah volatilitas sebagai pola ragam variansi dari data deret waktu terutama data keuangan [1], seperti nilai tukar mata uang. Dalam studi keuangan, volatilitas diperhatikan pada *returns* aset daripada harga aset karena *returns* memiliki sifat empiris yang stasioner [2]. Studi ini menggunakan *mean-corrected returns* yang didefinisikan:

$$R_t = 100 \times \left[(\ln S_t - \ln S_{t-1}) - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (\ln S_i - \ln S_{i-1}) \right] \quad (1)$$

dengan S_t adalah harga aset pada saat t .

Terdapat banyak model nonlinear untuk mengestimasi volatilitas dari *returns* aset keuangan. Model yang populer dalam literatur yaitu model *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (ARCH) yang pertama kali dikembangkan oleh Engle pada 1982 [3]. Safrudin dkk. telah mendiskusikan model ARCH(1) untuk volatilitas *returns*, dengan *returns error* berdistribusi normal dan *Student-t* [4]. Model yang disajikan oleh Safrudin dkk. telah mengakomodasi eksistensi dari *fat tailedness* tetapi belum mengakomodasi *skewness* dalam *returns*. Beberapa studi, seperti Nakajima dan Omori pada 2012, [5], Tsiotas pada 2012 [6], serta Nugroho dan Morimoto pada 2014 [7] menyarankan *returns* sebaiknya mengakomodasi *fat tailedness* dan *skewness*. Oleh karena itu, studi ini mengaplikasikan sebuah distribusi yang dapat mengakomodasi *fat tailedness* dan *skewness*, yaitu *non-central Student-t* (NCT), untuk *returns*. Lebih lanjut dibandingkan model-model volatilitas ARCH(1) yang berdistribusi normal, *Student-t*, dan NCT. Disini model diestimasi dengan menggunakan metode *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC). Studi empiris dari model volatilitas dilakukan dengan menggunakan data riil kurs beli *Japanese Yen* (JPY) dan *Euro* (EUR) terhadap *Indonesian Rupiah* (IDR) atas periode harian dari Januari 2009 sampai dengan Desember 2014.

II. METODE PENELITIAN

A. Model ARCH

Model ARCH dengan lag p (dinotasikan dengan ARCH(p)) dinyatakan seperti berikut[8]

$$R_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (2)$$

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \gamma_p \varepsilon_{t-p}^2, \quad \text{untuk } t = 2, \dots, T, \quad (3)$$

dengan N menyatakan distribusi normal. Sebagai kasus khusus, model volatilitas ARCH(1) yang selanjutnya dinamakan model V-ARCH(1) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$R_t = \sigma_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = a + bR_{t-1}^2, \text{ untuk } t = 2, \dots, T \tag{4}$$

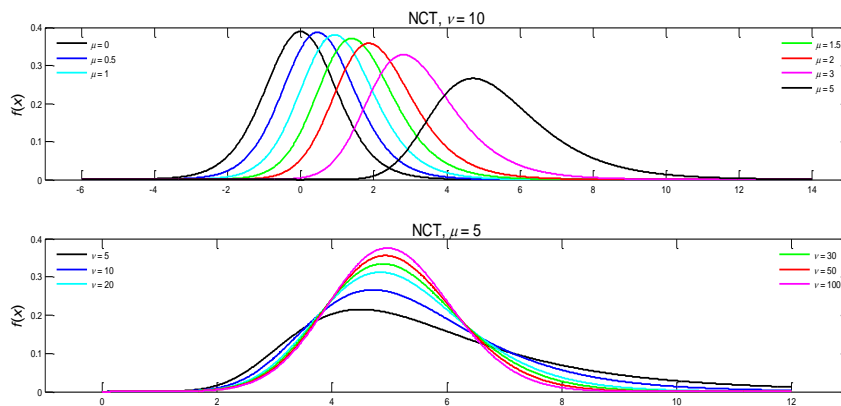
$$\sigma_1^2 = \frac{a}{1-b} \tag{5}$$

dengan $a > 0$ dan $0 \leq b < 1$ untuk menjamin positività dan stasioneritas dari volatilitas kuadrat [9].

Salah satu distribusi untuk mengakomodasi *flexible skewness* dan *heavy-tailedness* pada *returns error* yaitu NCT [10]:

$$P_{v,\mu} = (\mu + V)\sqrt{Z_v}, \tag{6}$$

dimana $V \sim N(0,1)$ dan $Z_v \sim IG\left(\frac{v}{2}, \frac{v}{2}\right)$, dengan IG menyatakan distribusi *inverse gamma*. Gambar 1 menampilkan fungsi kepadatan dari distribusi NCT untuk beberapa nilai parameter μ dan v , yang menunjukkan bahwa *skewness* dan *heavy-tailedness* dari distribusi NCT merupakan kombinasi dari nilai parameter-parameter. Saat $\mu=0$ distribusinya tereduksi menjadi distribusi *Student-t*. Semakin besar nilai μ menunjukkan *skewness* yang semakin positif, dan berlaku sebaliknya.



GAMBAR 1. Plot fungsi kepadatan dari distribusi NCT

Selanjutnya studi ini memfokuskan pada model volatilitas ARCH(1) dengan *returns error* berdistribusi NCT (selanjutnya disingkat V-ARCHnct(1)) yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$R_t = \sigma_t z_t^{\frac{1}{2}} (\mu + \xi_t), z_t \sim IG\left(\frac{v}{2}, \frac{v}{2}\right), \xi_t \sim N(0,1), \tag{7}$$

$$\sigma_t^2 = a + bR_{t-1}^2, \text{ untuk } t = 2, \dots, T,$$

$$\sigma_1^2 = \frac{a}{1-b},$$

dengan $a > 0$ dan $0 \leq b < 1$.

Ketika $\mu=0$, model diatas tereduksi ke model ARCH(1) dengan *returns error* berdistribusi *Student-t* (selanjutnya disingkat V-ARCHt(1)).

B. Metode MCMC untuk Model Volatilitas ARCH(1)

MCMC merupakan sebuah metode yang terdiri dari dua tahap: pertama, mengkonstruksi rantai Markov, dan kedua, mengaplikasikan metode Monte Carlo. Diambil $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_T)$, $\mathbf{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_T)$, dan $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_T)$. Distribusi *posterior* gabungan untuk model (7) yaitu

$$p(a, b, \mu, v, z | \mathbf{R}) = p(\mathbf{R} | \mu, \sigma, z) \times p(z | v) \times p(a, b, \mu, v)$$

dengan $p(\mathbf{R} | \mu, \sigma, z)$ merupakan fungsi *likelihood* dan $p(a, b, \mu, \nu)$ merupakan distribusi *prior* gabungan. Mengikuti kesepakatan umum, ditetapkan *prior* sebagai berikut :

$a \sim \text{eksp}(\lambda)$, $b \sim \text{Beta}(\alpha_b, \beta_b)$, $\mu \sim (m_\mu, V_\mu)$, dan $\nu \sim G(\alpha_\nu, \beta_\nu)$.

Oleh karena itu, distribusi *posterior* gabungan dinyatakan sebagai berikut:

$$p(a, b, \mu, \nu, z | \mathbf{R}) \propto \prod_{t=1}^T \sigma_t^{-1} z_t^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(R_t - \mu \sigma_t z_t^{\frac{1}{2}})^2}{\sigma_t^2 z_t} \right\} \\ \times \prod_{t=1}^T \left[\Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right]^{-1} z_t^{-\frac{\nu}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{\nu}{2z_t} \right\} \times \exp \{ -\lambda a \} \\ \times b^{\alpha_b-1} (1-b)^{\beta_b-1} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\mu - m_\mu)^2}{\nu_\mu} \right\} \times \nu^{\alpha_\nu-1} \exp \{ -\beta_\nu \nu \}$$

C. Pembangkitan Parameter

Pembangkitan Parameter a

Logaritma distribusi *posterior* untuk parameter a dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F_1(a) = \ln p(a | b, \mathbf{Z}, \mathbf{R}) \propto -\frac{1}{2} \ln 1a - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \ln(a + bR_{t-1}^2) \\ - \left(\frac{1-b}{2az_1} \right) R_1^2 + \left(\frac{1-b}{az_1} \right)^{\frac{1}{2}} \mu R_1 \\ + \sum_{t=2}^T \left[-\frac{R_t^2}{2(a + bR_{t-1}^2)z_t} + \frac{\mu R_t}{(a + bR_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} z_t^{\frac{1}{2}}} \right] - \lambda a$$

Dalam hal ini, *posterior* a tidak mengikuti suatu distribusi tertentu, maka parameter a dibangkitkan dengan menggunakan metode *independence chain Metropolis-Hastings* (IC-MH) dengan melakukan beberapa langkah sebagai berikut [11]:

Langkah 1 : membangkitkan proposal $a^* \sim N_{(0,1)}(m_{a^*}, V_{a^*})$.

Langkah 2 : menghitung rasio probabilitas penerimaan $r(a^*, a) = \frac{p(a^* | b, \mathbf{R})}{p(a | b, \mathbf{R})}$.

Langkah 3 : membangkitkan $u \sim U(0,1)$.

Langkah 4 : jika $u < \min\{1, r(a^*, a)\}$ maka proposal diterima, jika tidak maka proposal ditolak.

Dalam kasus ini, m_{a^*} dan V_{a^*} ditentukan menggunakan metode yang didasarkan pada tingkah laku distribusi disekitar modus (lihat Albert (2009)). D dicari m_{a^*} sedemikian sehingga $F_1'(m_{a^*}) = 0$ dan selanjutnya dihitung $V_{a^*} = -[\min\{-10^{-4}, F_1'(m_{a^*})\}]^{-1}$.

Pembangkitan Parameter b

Logaritma distribusi *posterior* untuk parameter b dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$F_2(b) = \ln p(b | a, \mathbf{Z}, \mathbf{R}) \propto \frac{1}{2} \ln(1-b) - \frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \ln(a + bR_{t-1}^2) - \left(\frac{1-b}{2az_1} \right) R_1^2 + \left(\frac{1-b}{az_1} \right)^{\frac{1}{2}} \mu R_1 \\ + \sum_{t=2}^T \left[-\frac{R_t^2}{2(a + bR_{t-1}^2)z_t} + \frac{\mu R_t}{(a + bR_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} z_t^{\frac{1}{2}}} \right] + (\alpha_b - 1) \ln b + (\beta_b - 1) \ln(1-b)$$

Dalam hal ini, *posterior* b juga tidak mengikuti suatu distribusi tertentu, maka parameter b dibangkitkan dengan menggunakan metode IC-MH seperti pada pembangkitan parameter a .

Pembangkitan Parameter μ

Logaritma distribusi *posterior* untuk parameter μ dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$F_3(\mu) = \ln p(\mu | a, b, \mathbf{Z}, \mathbf{R}) \propto -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^T \frac{(R_t - \mu \sigma_t z_t^{\frac{1}{2}})^2}{\sigma_t^2 z_t} - \frac{\mu^2 - 2\mu m_\mu}{2v_\mu}$$

$$\propto -\frac{1}{2} \left(T + \frac{1}{v_\mu} \right) \mu^2 + \left(\sum_{t=1}^T \frac{R_t}{\sigma_t z_t^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_\mu}{v_\mu} \right) \mu$$

Dalam hal ini, parameter μ dapat dibangkitkan secara langsung dari distribusi normal yaitu

$$\mu \sim N(M_\mu, V_\mu) \text{ dimana } V_\mu = \left(T + \frac{1}{v_\mu} \right)^{-1} \text{ dan } M_\mu = V_\mu \left(R_1 \left[\frac{1-b}{az_1} \right]^{\frac{1}{2}} + \sum_{t=2}^T \frac{R_t}{\sigma_t z_t^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_\mu}{v_\mu} \right)$$

Pembangkitan Parameter v

Logaritma distribusi *posterior* untuk parameter v dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$F_4(v) = \ln p(v | \mathbf{Z}) \propto \frac{vT}{2} \ln \left(\frac{v}{2} \right) - T \ln \left(\Gamma \left(\frac{v}{2} \right) \right) - \frac{v}{2} \sum_{t=1}^T [\ln(z_t) + z_t^{-1}] + (\alpha_v - 1) \ln v - \beta_v v$$

Dalam hal ini, *posterior* v tidak mengikuti suatu distribusi tertentu, maka parameter v dibangkitkan dengan menggunakan metode IC-MH seperti pada pembangkitan parameter a dan b , dengan proposalnya adalah $v^* \sim N_{[3,40]}(m_{v^*}, V_{v^*})$.

Pembangkitan Parameter z

Distribusi *posterior* untuk parameter z_t dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$p(z_t) = f_{IG}(z_t | \alpha, \beta_t) \times g(z_t | a, b, \mu, R_{t-1}, R_t),$$

$$\text{dengan } \alpha = \frac{v+1}{2}, \beta_t = \begin{cases} \frac{(1-b)R_1^2 + av}{2a}, t=1, \\ \frac{R_t^2 + (a + bR_{t-1}^2)v}{2(a + bR_{t-1}^2)}, t=2, \dots, T, \end{cases}$$

$$g(z_t | a, b, \mu, R_{t-1}, R_t) = \begin{cases} \exp \left[\frac{(1-b)^{\frac{1}{2}} \mu R_1}{az_1^{\frac{1}{2}}} \right], t=1, \\ \exp \left[\frac{\mu R_t}{(a + bR_{t-1}^2)^{\frac{1}{2}} z_t^{\frac{1}{2}}} \right], t=2, \dots, T. \end{cases}$$

Dalam hal ini, *posterior* z_t tidak mengikuti suatu distribusi tertentu, maka parameter z_t dibangkitkan dengan menggunakan metode IC-MH seperti pada pembangkitan parameter a , b , dan μ tetapi dengan proposalnya yaitu $z_t^* \sim IG(\alpha, \beta_t)$ dan rasio penerimaannya yaitu

$$r(z_t^*, z_t) = \frac{g(z_t^* | a, b, \mu, R_{t-1}, R_t)}{g(z_t | a, b, \mu, R_{t-1}, R_t)}.$$

Secara ringkas, algoritma MCMC dikerjakan seperti berikut:

- i. Inisialisasi a , b , z , dan v .
- ii. Membangkitkan nilai acak μ secara langsung.
- iii. Membangkitkan vektor nilai acak z dengan metode IC-MH.
- iv. Membangkitkan nilai acak v dengan metode IC-MH.

- v. Membangkitkan nilai acak a dengan metode IC-MH.
- vi. Membangkitkan nilai acak b dengan metode IC-MH.

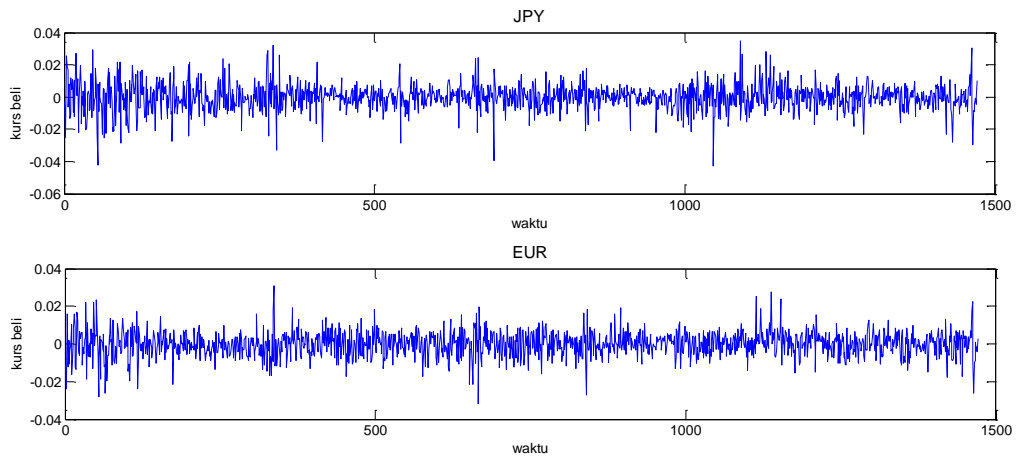
D. *Pemilihan Model*

Untuk memeriksa apakah data lebih mendukung distribusi NCT daripada distribusi normal dan *Student-t*, model V-ARCH(1), V-ARCHt(1), dan V-ARCHnct(1) dibandingkan menggunakan kriteria faktor Bayes. Dalam penghitungan faktor Bayes diperlukan nilai *marginal likelihood* yang dalam hal ini diestimasi menggunakan prosedur dari [12].

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. *Data yang Diamati*

Model V-ARCHnct(1) dan algoritma MCMC diaplikasikan pada data *returns* harian dari kurs beli JPY dan EUR terhadap IDR periode Januari 2009 sampai Desember 2014. Gambar 2 menampilkan plot *returns* harian untuk kedua data dan Tabel 1 menyajikan statistik deskriptifnya. Dari uji Jarque–Bera (*JB test*) dan uji Ljung–Box (*LB test*) diketahui bahwa *returns* harian untuk kedua data adalah berdistribusi tak normal dan tidak berkorelasi.



GAMBAR 2. *Plot returns* harian untuk kurs beli JPY dan EUR terhadap IDR periode Januari 2009 sampai Desember 2014.

TABEL 1. Statistik deskriptif *returns* harian untuk kurs beli JPY dan EUR terhadap IDR periode Januari 2009 sampai Desember 2014.

Mata Uang	Mean	SD	Skewness	Kurtosis	JB Test (normalitas)	LB test (autokorelasi)
JPY	0,0000	0,8353	-0,2193	5,6150	Tidak normal	Tidak ada korelasi
EUR	0,0000	0,6774	-0,1582	4,7173	Tidak normal	Tidak ada korelasi

B. *Pengaturan MCMC*

Pada algoritma MCMC ditetapkan nilai *hyperparameter* untuk prior sebagai berikut:

$$\lambda = 1, \alpha_b = 2,5, \beta_b = 3, \alpha_v = 16, \beta_v = 0,8, m_\mu = 0, V_\mu = 1$$

dan nilai awal parameter ditetapkan sebagai berikut:

$$a_0 = 0,1, b_0 = 0,1, \nu_0 = 20, z \sim IG\left(\frac{\nu_0}{2}, \frac{\nu_0}{2}\right)$$

Selanjutnya nilai-nilai parameter dibangkitkan sebanyak 15.000 dimana 5.000 nilai awal dihilangkan dan sisanya disimpan untuk digunakan dalam penghitungan rata-rata *posterior*, standar deviasi, 95% interval HPD, dan *integrated autocorrelation time* (IACT). IACT dapat ditafsirkan sebagai banyaknya iterasi MCMC yang diperlukan untuk menghasilkan nilai-nilai acak yang saling bebas. Di sini HPD dan IACT berturut-turut diestimasi menggunakan metode dari [13] dan [14].

C. *Estimasi Parameter*

Tabel 2–Tabel 4 meringkas hasil simulasi *posterior* dari parameter-parameter dalam model-model V-ARCH(1). Nilai IACT mengindikasikan bahwa metode MCMC yang dikonstruksi adalah cukup efisien. Dari Tabel 4 diketahui bahwa 95% interval HPD dari μ memuat 0, artinya bahwa asumsi distribusi NCT ditolak untuk semua data. Hasil ini juga didukung oleh uji Kolmogorov–Smirnov (KS test) yang diberikan dalam Tabel 5. Meskipun begitu, berdasarkan kriteria faktor Bayes dan mengikuti penafsiran dari [15] diperoleh bukti sangat kuat terhadap dukungan penggunaan distribusi NCT daripada distribusi normal dan *Student-t* untuk *returns error* pada semua data.

Pada penerapan data kurs beli JPY dan EUR terhadap IDR atas periode Januari 2009 sampai Desember 2014, didapatkan model V-ARCHnct(1) dengan *returns error* berdistribusi NCT untuk *returns* kurs beli JPY terhadap IDR yaitu

$$\sigma_t^2 = 0,2558 + 0,7275R_{t-1}^2$$

dan untuk *returns* kurs beli EUR terhadap IDR yaitu

$$\sigma_t^2 = 0,2637 + 0,4022R_{t-1}^2.$$

TABEL 2. Ringkasan estimasi model V-ARCH(1)

Parameter	<i>a</i>	<i>b</i>
Data: <i>Returns</i> kurs beli JPY terhadap IDR		
Mean	0,5258	0,2702
SD	0,0190	0,0333
LB	0,4880	0,2073
UB	0,5623	0,3386
IACT	2,3015	2,0785
ML-GD	-5265,9	
Waktu Komputasi (detik)	145,6800	
Data: <i>Returns</i> kurs beli EUR terhadap IDR		
Mean	0,3704	0,1992
SD	0,0127	0,0272
LB	0,3453	0,1472
UB	0,3957	0,2534
IACT	2,0305	1,9393
ML-GD	-3710,0	
Waktu Komputasi (detik)	145,6800	

TABEL 3. Ringkasan estimasi model V-ARCHt(1)

Parameter	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>v</i>
Data: <i>Returns</i> kurs beli JPY terhadap IDR			
Mean	0,2671	0,4687	6,1114
SD	0,0202	0,0191	0,8818
LB	0,2260	0,4253	4,5574
UB	0,3047	0,4862	7,8619
IACT	27,0388	395,3562	37,5702
ML-GD	-2709,9		
Waktu Komputasi (detik)	144,7900		
Data: <i>Returns</i> kurs beli EUR terhadap IDR			
Mean	0,2709	0,2868	11,5312
SD	0,0159	0,0248	2,3593
LB	0,2406	0,4253	7,3516
UB	0,3026	0,3237	16,1211
IACT	37,7161	138,1507	64,5650
ML-GD	-2733,9		

Waktu Komputasi (detik)	144,7850
-------------------------	----------

TABEL 4. Ringkasan estimasi model V-ARCHnct(1)

Parameter	<i>a</i>	<i>b</i>	μ	ν
Data: <i>Returns</i> kurs beli JPY terhadap IDR				
Mean	0,2558	0,7275	0,0143	6,9072
SD	0,0327	0,0850	0,0268	1,1234
LB	0,2008	0,5557	-0,0374	4,9236
UB	0,3232	0,8742	0,0668	9,2442
IACT	60,2950	36,5536	1,1031	57,6223
ML-GD	-2556,0			
Waktu Komputasi (detik)	438,5925			
Data: <i>Returns</i> kurs beli EUR terhadap IDR				
Mean	0,2637	0,4022	0,0022	12,7135
SD	0,0254	0,0691	0,0263	2,4116
LB	0,2185	0,2616	-0,0492	8,5691
UB	0,3136	0,5331	0,0539	17,7004
IACT	67,4781	49,5612	1,0422	71,4123
ML-GD	-2665,4			
Waktu Komputasi (detik)	450,6699			

Berikut disajikan hasil uji KS pada Tabel 5 yang menunjukkan bahwa *error* (ξ_t) berdistribusi *Student-t*.

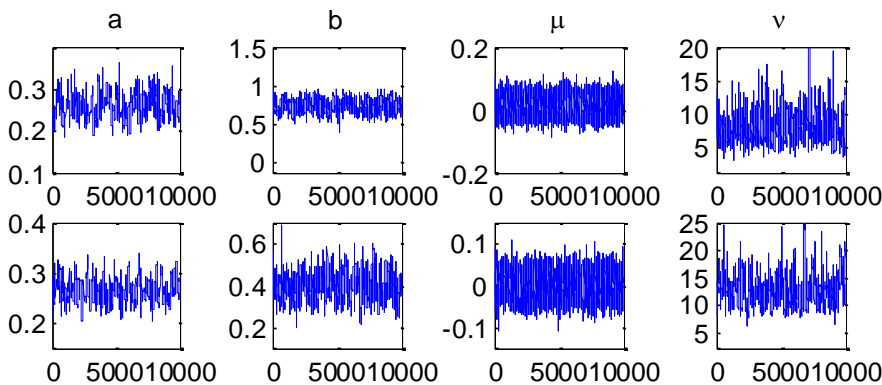
TABEL 5. Hasil uji KS untuk *error* (ξ_t)

Data	D	p-value	Keterangan
JPY	0,0943	0,0000	<i>Student-t</i>
EUR	0,0991	0,0000	<i>Student-t</i>

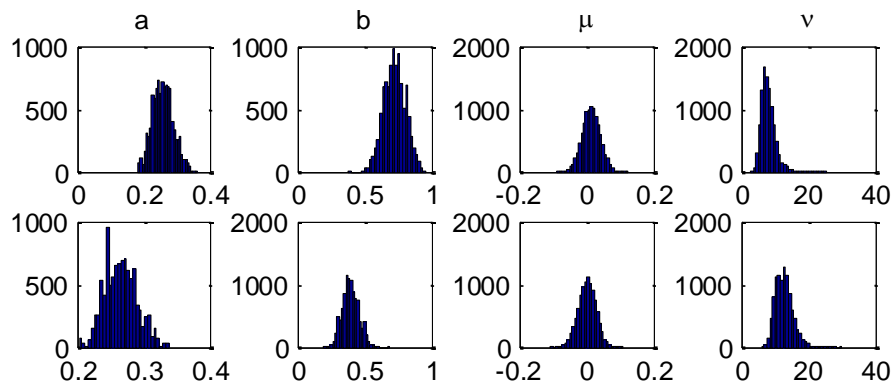
TABEL 6. Nilai dua kali log faktor Bayes dari model V-ARCHnct(1) terhadap model V-ARCH(1) dan V-ARCHt(1)

	Mata Uang	V-ARCH(1)	V-ARCHt(1)
V-ARCHnct(1)	JPY	5419.8	307.8
	EUR	2089.2	137.0

Plot nilai-nilai parameter *a*, *b*, μ , dan ν yang telah dibangkitkan pada algoritma MCMC ditampilkan dalam Gambar 3, yang mengindikasikan bahwa nilai dari masing-masing parameter berfluktuasi di sekitar rata-rata *posterior*. Sementara itu, histogram dari distribusi *posterior* untuk setiap parameter disajikan dalam Gambar 4.



GAMBAR 3. Plot nilai parameter *a*, *b*, μ , dan ν yang telah dibangkitkan



GAMBAR 4. Histogram distribusi *posterior* untuk masing-masing parameter

IV. SIMPULAN DAN SARAN

Dalam studi ini telah dikonstruksi metode MCMC yang efisien untuk mengestimasi model V-ARCHnct(1). Hasil empiris dengan menggunakan data *returns* kurs beli JPY dan EUR terhadap IDR menunjukkan bahwa distribusi NCT lebih baik daripada distribusi normal dan *Student-t* berdasarkan kriteria faktor Bayes. Lebih lanjut model dapat dibandingkan dengan penggunaan distribusi *Student-t* umum lainnya, seperti *generalized hyperbolic skewed Student-t*.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Engle, R. F. (2004). Risk and Volatility : Econometric Models and Financial Practice. *The American Economic Review*, 405-420.
- [2] Campbell, J.Y., Lo, A.W., & MacKinlay, A.C. (1997). *The econometrics of financial markets*. Princeton University Press, New Jersey.
- [3] Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of The Variance of The United Kingdom Inflation, *Journal of Econometrica*, 50(4):987-1007.
- [4] Safrudin, I. M, Nugroho, D.B. & Setiawan, A. (2015). Estimasi MCMC untuk *Return Volatility* dalam Model ARCH dengan *Return Error* Berdistribusi *Student-t*, Universitas Kristen Satya Wacana.
- [5] Nakajima, J. & Omori, Y. (2012). Stochastic volatility model with leverage and asymmetrically heavy-tailed error using GH skew Student's *t*-distribution, *Comput. Stat. Data Anal.*, **56**, 3690-3704.
- [6] Tsiotas, G. (2012). On generalised asymmetric stochastic volatility models, *Comput. Stat. Data Anal.*, **56**, 151-172.
- [7] Nugroho, D. B. & Morimoto, T. (2014). *Realized Non-Linear Stochastic Volatility Models with Asymmetric Effects and Generalized Student's-t Distribution*. *J. Japan Statist. Soc.*, **44**, 83-118.
- [8] Tsay R.S. (2002). *Analysis of Financial Time Series*. Ed ke-2 edition, New York:John Wiley & sons, Inc.
- [9] Lo, M. S. (2003). *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic Time Series Model, A project submitted in partial fulfillment of requirements for degree of master of science*. Simon Fraser University.
- [10] Johnson, N. L., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions* (2nd ed.), John Wiley & Sons.
- [11] Tierney, L. (1994). Markov chain for exploring posterior distributions. *Annals of Statistics*, **22**(4), 1701-1762.
- [12] Gelfand, A. E. & Dey, D. K. (1994). Bayesian model choice: asymptotics and exact calculations. *Journal of the Royal Statistical Society, B* 56, 501-514.
- [13] Chen, M. H. & Shao, Q. M. (1999). Monte Carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8**, 69-92.
- [14] Geweke, J. (1992). Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, *Bayesian Statistics 4* (eds. J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid dan A. F. M. Smith), 169-194.
- [15] Kass, R. E. & Raftery, A. E. (1995). Bayes factors, *J. Am. Stat. Assoc.*, **90**(430), 773-795.